Tarea 7. Fecha de entrega: Jueves 22 de Octubre hasta las 6:00 pm (SICUA)

[Ejemplo de un estimador insesgado y eficiente paso a paso]. En este ejercicio, vamos a aplicar los conceptos discutidos durante esta semana. Suponga que tiene una muestra aleatoria i.i.d $X_1, \ldots, X_n$ tal que $X_1 \sim Poisson(\lambda)$. Usando esta información, responda las siguientes preguntas.

1. Plantee la función de verosimilitud y la función de log verosimilitud del parámetro λ dada la muestra $X_1, \ldots, X_n$
2. Muestre que el estimador de máxima verosimilitud del parámetro λ es $\hat{\lambda} = \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
3. Muestre que $\hat{\lambda}$ es un estimador insesgado de λ
4. Muestre que $Var\left(\hat{\lambda}\right) = \frac{\lambda}{n}$
5. Considere el conjunto de estimadores insesgados de λ, $\left\{\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}^+ : \mathbb{E}\left(\tilde{\lambda}\right) = \lambda\right\}$. Dentro de este conjunto, vamos a mostrar que $\hat{\lambda}$ es el mejor estimador insesgado usando la cota inferior de Cramer-Rao. Recuerde que para cualquier estimador (sesgado o insesgado) de λ, $W(X_1, \ldots, X_n)$, la cota inferior de Cramer-Rao esta definida por

$$B(\lambda) = \frac{\left(\frac{d}{d\lambda}\mathbb{E}\left(W\left(X_1, \ldots, X_n\right)\right)\right)^2}{n\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln f\left(X_i;\lambda\right)\right)^2\right]},$$

donde $f(X_i;\lambda)$ es la función de probabilidad de una variable aleatoria Poisson con parámetro λ.

   (a) Muestre que para cualquier estimador insesgado de λ,

$$B(\lambda) = \frac{1}{n\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln f\left(X_i;\lambda\right)\right)^2\right]}$$

   (b) Usando la información de la función de densidad de X_i, muestre que

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln f\left(X_i;\lambda\right)\right)^2\right] = \frac{1}{\lambda^2}\mathbb{E}\left[\left(X_i - \lambda\right)^2\right]$$

   (c) Usando sus resultados anteriores, muestre que

$$B(\lambda) = \frac{\lambda}{n}$$

   (d) Con este último resultado ¿es posible afirmar que $\hat{\lambda}$ es el mejor estimador insesgado de λ? ¿por qué?