Tarea 4. Fecha de entrega: Jueves 17 de Septiembre hasta las 6:00 pm (SICUA)

---

1. Sea $\mathbf{X} = (X, Y)'$ un vector aleatorio continuo. Usando las propiedades de la función de distribución conjunta $F(x, y)$, muestre que X y Y son independientes si y sólo si

$$f(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y)$$

   donde $f(x, y)$ es la función de densidad conjunta del vector $\mathbf{X}$ y $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ son las densidades marginales de X y Y.

2. Sean X y Y dos variables aleatorias tal que $\mathbb{E}\left(X^2\right) < \infty$ y $\mathbb{E}\left(Y^2\right) < \infty$. Usando la definición de varianza, covarianza y correlación y las propiedades del valor esperado, muestre que

   (a) $Var(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left[\mathbb{E}(X)^2\right]$

   (b) $Cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$

   (c) $Cov(aX + b, Y) = aCov(X, Y)$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$

   (d) $\rho(aX + b, Y) = \rho(X, Y)$ para todo $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$

3. [Independencia, independencia en media condicional, ortogonalidad]. Sean X y Y dos variables aleatorias tal que $\mathbb{E}\left(X^2\right) < \infty$ y $\mathbb{E}\left(Y^2\right) < \infty$. Muestre que

   (a) Si X y Y son independientes, entonces $Cov(X, Y) = 0$

   (b) Si X y Y son independientes en media condicional, i.e. si $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$, entonces $Cov(X, Y) = 0$. (Pista: $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(XY|X)]$)

   (c) ¿Es posible que X y Y no sean independientes pero que $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$? Justifique su respuesta